Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 13 del 07/05/2019
Processi di Poisson

Leonardo Tamiano

Contents

1 Processi di Poisson

Definizione 1.1. Siano $\{X_n\}_{n\geq 1}$ delle v.a. i.i.d. con $X_i \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$. Definiamo il processo stocastico $(S_n)_{n\geq 0}$ nel seguente modo

- $S_0 := 0$;
- $S_n := \sum_{i=1}^{n} X_i = S_{n-1} + X_n$;

Infine, per ogni $t \in \mathbb{R}^+$, definiamo la seguente v.a.

$$N_t := \max\{n \geq 0 : S_n \leq t\}$$

La successione di queste v.a. $(N_t)_{t\geq 0}$ al variare di t forma un processo stocastico a tempo continuo, che prende il nome di *processo di Poisson*.

Una possibile interpretazione per un processo di Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ è la seguente: supponiamo di avere un flusso di eventi, e interpretiamo il valore di X_n come l'intertempo tra l'$(n-1)$-esimo evento e l'n-esimo evento. Da questa interpretazione di X_n segue che S_n conta il tempo necessario ad avere n eventi, mentre N_t conta il numero degli eventi che si verificano fino al tempo t (compreso quest'ultimo), se la sequenza degli eventi si succede ad intervalli esponenziali e indipendenti di parametro $\lambda > 0$.

2 Processi di conteggio

Il processo di Possion è un esempio di una classe più ampia di processi stocastici a tempo continuo, che prendono il nome di processi di conteggio.

Definizione 2.1. Un processo di conteggio è un processo aleatorio a tempo continuo $(C_t)_{t>0}$ tale che:

1. $C_0 = 0$
2. $C_s(w) \leq C_t(w),\ \forall s \leq t, \forall w \in \Omega$
3. $\Delta C_t \in \{0, 1\}$, con $\Delta C_t = C_t - C_{t^-}$, che rappresenta il valore del salto dopo l'avvenimento di un evento.
4. Continuità a destra, ovvero

$$\lim_{s\to 0} C_{t+s}(w) = C_t(w),\ \ \forall t \geq 0, \forall w \in \Omega.$$

3 Calcolo della legge di N_t (stazionario)

Al fine di calcolare la legge di N_t, utilizziamo, senza dimostrazione, il seguente risultato:

Proposizione 3.1. La somma di n v.a. di legge esponenziale di parametro λ indipendenti tra loro è Erlang di parametri (n, λ).

Procediamo quindi con la dimostrazione della seguente proposizione.

Proposizione 3.2. Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson. Allora

$$N_t \sim Poisson(\lambda t)$$

Proof. Iniziamo notando che dalla definizione di N_t vale la seguente equivalenza

$$(N_t \geq k) \iff (S_k \leq t)$$

Infatti, se vale $(N_t \geq k)$, allora dopo un tempo t sono successi almeno k eventi, e quindi il $k-$esimo evento deve necessariamente essere successo prima del tempo t. Viceversa, se vale $(S_k \leq t)$, allora il $k-$esimo evento succede prima del tempo t, e quindi al tempo t sono successi almeno k eventi. Utilizzando questa equivalenza possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(N_t \geq k) - P(N_t \geq k+1) \\ &= P(S_k \leq t) - P(_{k+1} \leq t) \end{aligned}$$

Abbiamo quindi ridotto il calcolo della legge di N_t al calcolo della funzione di distribuzione di S_k. Dato che $S_k = X_1 + ... + X_k$, con $X_i \sim Exp(\lambda)$, dalla proposizione di prima abbiamo che $S_k \sim Erlang(k, \lambda)$, e quindi che la densità di S_k è pari a

$$f_{S_k}(x) = \frac{\lambda^k \cdot x^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\lambda x}$$

Andando a calcolare la funzione di distribuzione di S_k troviamo la seguente formula, dimostrabile per induzione su k

$$F_{S_k}(t) = P(S_k \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^j}{j!} \cdot e^{-\lambda t}$$

Mettendo tutto insieme troviamo

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(S_k \leq t) - P(_{k+1} \leq t) \\ &= 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^t}{j!} \cdot e^{-\lambda t} - (1 - \sum_{j=0}^{k} \frac{(\lambda t)^t}{j!} \cdot e^{-\lambda t}) \\ &= \frac{(\lambda t)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

□

4 Interpretazione di λ

Dato che $\mathbb{E}[Poisson(\lambda t)] = \lambda t$, ho che $\mathbb{E}[N_1] = \lambda$. Dunque, troviamo che λ rappresenta sia il numero medio degli eventi che si verificano nell'intervallo di tempo unitario, sia il reciproco del tempo medio di attesa tra un evento e l'altro. Quindi, se λ cresce, allora cresce la frequenza degli eventi, e viceversa se λ decresce, allora gli eventi diventano più rari tra loro.

5 Perdità di memoria per un processo di Poisson

Fissato un tempo t, il tempo che occorre attendere a partire da t affinché si verifichi un altro evento è una v.a. che ha legge esponenziale di parametro λ. Formalmente, definita la v.a.

$$\gamma_t := S_{N_t+1} - t$$

abbiamo che $\gamma_t \sim Exp(\lambda)$. Questa proprietà deriva dalla perdità di memoria delle v.a. con legge esponenziale. Infatti vale che, se $X_1 \sim Exp(\lambda)$, allora si ha

$$\begin{aligned} P(X_1 > t+s | X_1 > t) &= \frac{P(X_1 > t+s, X_1 > t)}{P(x_1 > t)} \\ &= \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} \\ &= e^{-\lambda s} \\ &= P(X_1 > s) \end{aligned}$$