Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 14 del 08/05/2019
Incrementi di un Processo di Poisson

Leonardo Tamiano

Contents

1 Calcolo di $P(X < Y)$, con X, Y esponenziali 2

2 Gli incrementi di $(N_t)_{t \geq 0}$ sono v.a. indipendenti 3

1 Calcolo di $P(X < Y)$, con X, Y esponenziali

Siano $X \sim Exp(\lambda), Y \sim Exp(\mu)$, con X e Y indipendenti, e $\lambda, \mu \geq 0$. Sono interessato a calcolare la probabilità che $X > Y$. A tale fine richiamiamo la formula delle probabilità totali vista nello studio di v.a. discrete:

Data una partizione $B_1, B_2, ..., B_k$ dello spazio degli eventi Ω, abbiamo che, preso un evento A, vale la seguente formula

$$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

Un fatto interessante è che, dando un significato molto preciso alla probabilità $P(X < Y \mid Y = y)$, con X, Y v.a. continue, è possibile espandere la formula delle probabilità totali anche nel caso continuo. In particolare, date X, Y v.a. continue, vale la seguente

$$P(X < Y) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X < y \mid Y = y) \cdot f(y) dy$$

Applicando la formula troviamo quindi

$$\begin{aligned}
P(X < Y) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < y \mid Y = y) \cdot f(y) dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} P(X < y) \cdot f(y) dy \\
&= \int_{0}^{\infty} P(X < y) \cdot \mu e^{-\mu y} dy \\
&= \int_{0}^{\infty} (1 - e^{-\lambda y}) \cdot \mu e^{-\mu y} dy \\
&= \int_{0}^{\infty} \mu e^{-\mu y} - \mu e^{-y(\mu + \lambda)} dy \\
&= \frac{\lambda}{\lambda + \mu}
\end{aligned}$$

Notiamo che il risultato trovato è conforme alle nostre aspettative. Infatti, più cresce λ e più è alta la probabilità che $X < Y$. Inoltre notiamo anche che la formula è simmetrica rispetto a λ e μ.

Osservazione 1.1. Il calcolo di probabilità della forma $P(X > Y)$ è molto utile nello studio dei processo di Poisson. Infatti, se vado a definire due flussi di Poisson, uno con v.a. che sono i.i.d. a X, e l'altro con v.a. che sono i.i.d. a Y, allora se sono in grado di calcolare $P(X > Y)$ sono anche in grado di calcolare qual'è la probabilità che il primo evento del primo flusso di Poisson accada dopo del primo evento del secondo flusso di Poisson.

2 Gli incrementi di $(N_t)_{t\geq 0}$ sono v.a. indipendenti

Sia $N := (N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson di parametro λ. Andiamo adesso a dimostrare, almeno in parte, la seguente proprietà:

Gli incrementi di un processo di Poisson su intervalli di tempo disgiunti sono v.a. indipendenti tra loro.

In formula, $\forall k \geq 2,\ \ \forall\ 0 \leq s_1 < t_1 \leq s_2 < t_2 \leq ... \leq s_k < t_k$, le v.a.

$$N_{t_1} - N_{s_1},\ N_{t_2} - N_{s_2},\ ...,\ N_{t_k} - N_{s_k}$$

sono indipendenti tra loro. Inoltre, fissato $1 \leq h \leq k$, abbiamo che

$$N_{t_h} - N_{s_h} \sim Poisson(\lambda(t_h - s_h))$$

Quello che effettivamente andiamo a dimostrare noi è un caso particolare, in cui gli incrementi sono adiacenti. In particolare dimostriamo che dati $N_s - N_0$ e $N_{t+s} - N_s$ due incrementi adiacenti di un processo di Poisson N, con $t+s > s$ e $N_0 = 0$, abbiamo che

$$\begin{cases} N_s \perp\!\!\!\perp N_{t+s} - N_s \\ N_s \sim Poisson(\lambda s) \\ N_{t+s} - N_s \sim Poisson(\lambda t) \end{cases}$$

Per raggiungere tale risultato andremmo a dimostrare che, $\forall n.k \in N$:

$$\begin{aligned} P(N_s = n, N_{t+s} - N_s = k) &= P(N_s = n) \cdot P(N_{t+s} - N_s = k) \\ &= \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

Osservazione 2.1. Notiamo che, se vale tale relazione, allora sicuramente N_s e $N_{t+s} - N_s$ sono v.a. indipendenti. Inoltre, valgono anche le rimanenti due condizioni, in quanto,

$$\begin{aligned} P(N_s = n) &= \sum_k P(N_s = n | N_{t+s} - N_s = k) P(N_{t+s} - N_s = k) \\ &= P(N_s = n) P(N_{t+s} - N_s = k) \\ &= \sum_k \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \cdot \sum_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \end{aligned}$$

In quanto $\sum_k \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$ è la densità di una v.a. di poisson con parametro λt. Ma allora $N_s \sim Poisson(\lambda s)$. La stessa cosa poi può essere fatta per $N_{t+s} - N_s$.

Procediamo quindi con la dimostrazione.

Proof. Iniziano notando che

$$P(N_s = n, N_{t+s} - N_s = k) = P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k) - P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k-1)$$

Così facendo abbiamo ridotto il problema del calcolo di $P(N_s = n, N_{t+s} - N_s = k)$ al calcolo di $P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k)$. Notiamo poi che, dato che nell'intervallo di ampiezza t tra s e $s+t$ ci sono stati meno di k eventi, e dato che al tempo s ci sono stati n eventi, abbiamo che al tempo $s+t$ ci possono essere stati al massimo $n+k$ eventi. Ma allora, l'$(n+k+1)-$esimo evento avverrà sicuramente in un tempo $\geq s+t$. Ricordando che $S_{n+k+1} = S_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k+1}$, e definendo $Z := X_{n+2} + ... + X_{n+k+1}$, otteniamo la seguente

$$\begin{aligned} P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k) &= P(S_n \leq s < S_{n+1},\, S_{n+k+1} \geq s+t) \\ &= P(S_n \leq s < S_{n+1},\ S_{n+1} + X_{n+2} + ... + X_{n+k+1} \geq s+t) \\ &= P(S_n \leq s < S_{n+1},\ S_n + X_n + Z \geq s+t) \end{aligned}$$

con $X_n \sim Exp(\lambda)$, $S_n \sim Erl(n,\lambda)$, $Z \sim Erl(k,\lambda)$, dove ricordiamo con $Erl(k,\lambda)$ intendiamo una v.a. continua con la seguente densità

$$f_Z(x) = \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$$

Andando a riscrivere otteniamo

$$\begin{aligned} P(N_s = n, N_{s+t} - N_t \leq k) &= P(S_n \leq s < S_{n+1},\ s+t < S_n + X_{n+1} + Z) \\ &= P(S_n \leq s, S_n + X_{n+1} > s, s+t < S_n + X_{n+1} + Z) \end{aligned}$$

Applichiamo adesso la formula dell'evento certo (caso continuo), alla v.a. S_n, per ottenere

$$\begin{aligned} P(S_n \leq s, S_n + X_{n+1} > &s, s+t < S_n + X_{n+1} + Z) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(y + X_{n+1} > s, s+t < y + X_{n+1} + Z \mid S_n = y) \cdot F_{S_n}(y) dy \\ &= \int_0^s P(y + X_{n+1} > s, s+t < y + X_{n+1} + Z \mid S_n = y) \cdot \frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} dy \end{aligned}$$

Dato S_n è indipendente da X_{n+1} e Z, il condizionamento cade e troviamo

$$\int_0^s P(y + X_{n+1} > s, s+t < y + X_{n+1} + Z) \cdot \frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} dy$$

Andando poi ad applicare la formula dell'evento certo alla v.a. X_{n+1}, troviamo

$$\int_0^s \left(\int_{-\infty}^{\infty} P(y + x > s, s+t < y + x + Z \mid X_{n+1} = x) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx\right) \frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} dy$$

In modo analogo a quanto visto prima, Z è indipendente da X_{n+1}, e quindi anche questa volta il condizionamento cade. Inoltre, dato che $y < s$, l'evento $y+x > s$ è verificato se e solo se $x > s-y > 0$. Unendo queste due osservazioni troviamo

$$\int_0^s \Big(\int_{s-y}^{\infty} P(y+x > s, s+t < y+x+Z) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx\Big) \frac{\lambda^n y^{n-1} e^{-\lambda y}}{(n-1)!} dy$$

Arrivati a questo punto osserviamo che l'evento $(s+t < y+x+z)$ equivale all'evento $(Z > s+t-y-x)$. Inoltre, dato che Z è di legge Erlang, abbiamo che Z assume solo valori > 0. Dunque se $(s+t-y-x \leq 0) \iff (x \geq s+t-y)$ allora $P(Z > s+t-y-x) = 1$. Posso quindi semplificare l'integrale interno nel seguente modo

$$\begin{aligned}
&\int_{s-y}^{\infty} P(Z > s+t-y-x) \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \\
&\qquad = \int_{s-y}^{s-y+t} P(Z > s+t-y-x) \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{s-y+t}^{\infty} 1 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\qquad = \int_{s-y}^{s-y+t} (1 - P(Z \leq s+t-y-x)) \lambda e^{-\lambda x} dx + \int_{s-y+t}^{\infty} 1 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx
\end{aligned}$$

Dal fatto che $Z \sim Erlang(k, \lambda)$, abbiamo già fatto vedere che

$$P(Z \leq t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \frac{t^j}{j!} e^{-\lambda t}$$

L'integrale interno diventa quindi

$$\int_{s-y}^{s-y+t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(s+t-y-x)^j}{(s+t-y-x)!} e^{-\lambda(s+t-x-y)} \lambda e^{-\lambda x} dx + e^{-\lambda(s-y+t)}$$

Andando a sostituire la formula per l'integrale interno in quello esterno otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^s e^{-\lambda(s-y+t)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy \quad + \\
&\int_0^s \Big(\int_{s-y}^{s-y+t} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(s+t-y-x)^j}{(s+t-y-x)!} e^{-\lambda(s+t-x-y)} \lambda e^{-\lambda x} dx\Big) \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy
\end{aligned}$$

Semplificando il primo termine otteniamo

$$\begin{aligned}
&\int_0^s e^{-\lambda(s-y+t)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-\lambda y} dy = \\
&\qquad = e^{-\lambda(s+t)} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \int_0^s y^{n-1} dy \\
&\qquad = e^{-\lambda(s+t)} \frac{(\lambda s)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Semplificando il secondo termine invece otteniamo

$$\begin{aligned}
e^{-\lambda(s+t)} \int_0^s \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}\lambda^n}{j!(n-1)!} (\int_{s-y}^{s-y+t} (s+t-x-y)^j dx) y^{n-1} dy = \\
= e^{-\lambda(s+t)} \int_0^s \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}\lambda^n}{j!(n-1)!} (\frac{t^{j+1}}{j+1}) y^{n-1} dy = \\
= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}\lambda^n}{j!(n-1)!} (\frac{t^{j+1}}{j+1}) \int_0^s y^{n-1} dy = \\
= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{\lambda^{j+1}\lambda^n}{j!(n-1)!} (\frac{t^{j+1}}{j+1}) \frac{s^n}{n} = \\
= e^{-\lambda(s+t)} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^{j+1}}{(j+1)!} \frac{(\lambda s)^n}{n!}
\end{aligned}$$

Così facendo abbiamo calcolato

$$P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k) = e^{-\lambda(s+t)} \frac{(\lambda s)^n}{n!} + e^{-\lambda(s+t)} \frac{(\lambda s)^n}{n!} \sum_{j=0}^{k-1} {\frac{\lambda t}{(j+1)!}}^{j+1}$$

$$h = j+1 \implies = -\lambda(s+t) \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot \sum_{h=0}^{k} \frac{(\lambda t)^h}{h!}$$

Dunque, la probabilità che volevamo inizialmente calcolare è pari a

$$\begin{aligned}
P(N_s = n, N_{t+s} - N_s = k) &= P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k) - P(N_s = n, N_{t+s} - N_s \leq k+1) \\
&= -\lambda(s+t) \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot \sum_{h=0}^{k} \frac{(\lambda t)^h}{h!} - -\lambda(s+t) \frac{(\lambda s)^n}{n!} \cdot \sum_{h=0}^{k-1} \frac{(\lambda t)^h}{h!} \\
&= \frac{(\lambda s)^n}{n!} e^{-\lambda s} \cdot \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

$\square$