Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 15 del 14/05/2019
Processo di Poisson non Stazionario

Leonardo Tamiano

Contents

1 Sviluppo di MacLaurin

Abbiamo già dimostrato in una lezione precedente che $N_t \sim Poisson(\lambda t)$, e dunque che $P(N_t = k) = (\lambda t)^k/k! \cdot e^{-\lambda t}$. Studiando la funzione $f(t) := e^{-\lambda t}$ utilizzando lo sviluppo di MacLaurin troviamo la seguente relazione

$$e^{-\lambda t} = 1 + -\lambda t + o(t)$$

dove $o(t)$ rappresenta una funzione *infinitesimale* di t, ovvero una funzione tale che

$$\lim_{t \to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$$

Nel contesto dei processi di Poisson otteniamo la seguente cosa

- $P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) = 1 - \Delta t \cdot \lambda + o(\Delta t)$
- $P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) = \Delta t \cdot \lambda + o(\Delta t)$
- $P(N_{t+\Delta t} - N_t \geq 2) = o(\Delta t)$

Notiamo che tale risultato significa che la probabilità che ci siano più di un evento in un intervallo di tempo Δt è un infinitesimale in Δt, e più piccolo è l'intervallo e più bassa è tale probabilità.

2 Processo di Poisson non stazionario

Abbiamo già definito che cos'è un processo di Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ di parametro λ. Nella definizione iniziale il parametro λ non dipendeva dal tempo t. Andiamo adesso a introdurre una nuova versione del processo di Poisson in cui il parametro λ dipende dal tempo t.

Definizione 2.1. Un processo di Poisson non stazionario $(N_t)_{t\geq 0}$ di paramatro λ_t è un processo stocastico a tempo continuo che rispetta le seguenti richieste

(i) $N_0 = 0$

(ii) Traiettorie càdlàg, ovvero continue a destra, limitate da sinistra.

(iii) Incrementi indipendenti.

(iv) $P(N_{t+\Delta t} - N_t = 0) = 1 + \Delta t \cdot \lambda + o(\Delta t)$

(v) $P(N_{t+\Delta t} - N_t = 1) = \Delta t \cdot \lambda + o(\Delta t)$.

Nello studio dei processi di Poisson non stazionari utilizzeremo le equazioni differenziali.

3 Proprietà del Merging e dello Splitting

Per i processi di Poisson valgono le seguenti interessanti proprietà.

- **Proprietà del merging:** Siano $\bar{N} := (\bar{N}_t)_{t\geq 0}$, $\hat{N} := (\hat{N}_t)_{t\geq 0}$ due processi di Poisson di paramatri $\bar{\lambda}$ e $\hat{\lambda}$ rispettivamente. Se $\bar{N} \perp\!\!\!\perp \hat{N}$, allora $N := \bar{N} + \hat{N}$ è un processo di Poisson di paramatro $\bar{\lambda} + \hat{\lambda}$.

- **Proprietà dello splitting:** Sia $N := (N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson. Etichettiamo ogni evento del flusso con "1" con probabilità p_1, e con "2" con probabilità p_2. Allora, posto $N^{(i)} := (N_t^{(i)})_{t\geq 0}$ il processo che conta il numero di eventi etichettati "i", per $i = 1, 2$, abbiamo che $N^{(1)}$ è un processo di Poisson di parametro $p_i\lambda$.

3.1 Dimostrazione del merging

Al fine di dimostrare la proprietà del merging andiamo ad utilizzare la definizione data prima di processo di Poisson non stazionario.

Proof. Siano $\bar{N}$ e $\hat{N}_t$ due processi di Poisson indipendenti di parametri $\bar{\lambda}$, $hat\lambda$ rispettivamente. Definiamo un nuovo processo stocastico $N := (N_t)_{t\geq 0}$, definito da

$$N_t := \bar{N}_t + \hat{N}_t$$

e andiamo a far vedere che N è un processo di Poisson di parametro $\bar{\lambda} + \hat{\lambda}$. Per tale fine utilizzeremo la seconda definizione data di processo di Poisson. Andiamo quindi a far vedere che N rispetta tutti i punti della definizione.

(i) Dato che $\bar{N}_0 = 0$, $\hat{N}_0 = 0$, abbiamo che $\bar{N}_0 + \hat{N}_0 = 0 + 0 = 0 = N_0$.

(ii) Dato che sia $\bar{N}$ che $\hat{N}$ sono processi con traiettorie càdlàg, e dato che la somma di due processi con traiettorie càdlàg forma un processo con traiettorie càdlàg, abbiamo che N è un processo con traiettorie càdlàg.

(iii) Dall'indipendenza di $\bar{N}$ e $\hat{N}$ segue il fatto che gli incrementi di N sono indipendenti.

(iv) TODO

(v) TODO

□