Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 16 del 15/05/2019
Problema di Cauchy

Leonardo Tamiano

Contents

1 Dimostrazione dello splitting

La proprietà dello splitting è già stata introdotta nella lezione precedente. Andiamo quindi a fare vedere che è vera dimostrando che, fissato $t > 0$, vale

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m) = \frac{(\lambda p_1 t)^k}{k!} e^{-\lambda p_1 t} \cdot \frac{(\lambda p_2 t)^m}{m!} e^{-\lambda p_2 t}$$

Proof. Cominciamo notando la seguente cosa

$$\begin{aligned} P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m | N_t = n) \cdot P(N_t = n) \\ &= P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m | N_t = k + m) \cdot P(N_t = k + m) \end{aligned}$$

Infatti, dato che $N_t = N_t^{(1)} + N_t^{(2)}$, l'unico caso in cui

$$P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m | N_t = n)$$

non è nulla è quando $n = k + m$. Continuando notiamo che, l'evento $N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m | N_t = k + m$ equivale a dire di ottenere k successi in $k + m$ prove, in cui in ogni prova la probabilità di successo è p_1. Ma allora abbiamo che

$$\begin{aligned} P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m) &= P(N_t^{(1)} = k, N_t^{(2)} = m | N_t = k + m) \cdot P(N_t = k + m) \\ &= P(Bin(p_1, k + m) = k) \cdot P(N_t = k + m) \\ &= \binom{k+m}{k} p_1^k p_2^m \cdot P(N_t = k + m) \\ &= \frac{k+m}{k!m!} p_1^k p_2^m \cdot \frac{(\lambda t)^{k+m}}{(k+m)!} e^{-\lambda t} \\ &= \frac{p_1^k p_2^m}{k!m!} (\lambda t)^k (\lambda t)^m e^{-\lambda t} \\ &= \frac{(p_1 \lambda t)^k}{k!} \frac{(p_2 \lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda(p_1 + p_2)t} \\ &= \frac{(p_1 \lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda p_1 t} \cdot \frac{(p_2 \lambda t)^m}{m!} e^{\lambda p_2 t} \end{aligned}$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare. □

2 Processi di Poisson composti

Definizione 2.1. Sia $(N_t)_{t \geq 0}$ un processo di Poisson. Un *processo di Poisson composto* è un processo stocastico a tempo continuo $(X_t)_{t \geq 0}$ tale che

(i) $X_0 = 0$

(ii) $X_t := \sum_{i=1}^{N_t} D_i$,

con $D_1, D_2, ..., D_{N_t}$ v.a. i.i.d. a valori interi indipendenti dal processo $(N_t)_{t\geq 0}$.

Notiamo dunque che un processo di Poisson composto è un processo a valori in $\mathbb{N}$ con traiettorie costanti a tratti e continue a destra, ma non necessariamente con salti unitari e quindi non necessariamente un processo di conteggio.

2.1 Calcolo della media per processi di Poisson composti

Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson composto. Andiamo adesso a calcolare la media di $X_t := \sum_{i=1}^{N_t} D_i$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_t] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t} D_i] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{N_t} D_i \,|\, N_t = n] P(N_t = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{N_t} \mathbb{E}[D_i \,|\, N_t = n] P(N_t = m) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathbb{E}[D_1] \cdot P(N_t = m) \\
&= \mathbb{E}[D_1] \cdot \mathbb{E}[N_t] \\
&= \mathbb{E}[D_1] \cdot \lambda t
\end{aligned}$$

3 Problema differenziale di Cauchy

Al fine di studiare la legge di un processo di Poisson non stazionario, siamo portati a dover risolvere delle equazioni differenziali di primo grado. Ricordiamo a tale fine la seguente definizione

Definizione 3.1. Un *problema di Cauchy* è un sistema della forma

$$\begin{cases} \dot{y}_t = \alpha_t y_t + \beta_y \\ y_0 = \bar{y} \end{cases}$$

con α_t, β_t funzioni, $\bar{y} \in \mathbb{R}$ dati iniziali e y_t funzione da determinare.

Ricordiamo qui, senza dimostrazione, che il caso generale del problema di Cauchy è risolto dalla seguente formula

$$y_t = e^{\int_0^t \alpha_s ds} \cdot [\bar{y} + \int_0^t e^{-\int_0^u \alpha_s ds} \beta_u du]$$