# Tor vergata
# Laurea magistrale in Informatica
# Calcolo delle Probabilità 2
# A.A. 2018-2019

# Lezione 17 del 21/05/2019
# Legge di Poisson non Stazionario

Leonardo Tamiano

## Contents

# 1 Legge di $(N_t)_{t\geq 0}$ (non stazionario)

Sia $(N_t)_{t\geq 0}$ un processo di Poisson non stazionario, ovvero un processo di Poisson in cui il parametro $\lambda_t$ dipende dal tempo $t$. Al fine di calcolare la legge di $N_t$, ovvero $P(N_t = k)$ per $k \in \mathbb{N}$, andiamo a risolvere il seguente problema più generale: $\forall s > 0, t > 0$ fissati, vale la seguente

$$P(N_{t+s} - N_s = k) = \frac{(M_{t+s} - M_t)^k}{k!} e^{-(M_{t+s} - M_s)}$$

con,

$$M_x := \int_0^x \lambda_u du$$

**Osservazione 1.1.** Notiamo che riuscendo a calcolare $P(N_{t+s} - N_s = k)$ sono anche in grado di calcolare $P(N_t = k)$. Infatti, ponendo $s = 0$, ottengo

$$\begin{aligned} P(N_t = k) &= P(N_{t-0} - N_0 = k) \\ &= e^{-(M_t - M_0)} \frac{(M_t - M_0)^k}{k!} \\ &= e^{-\int_0^t \lambda_u du} \cdot \frac{(\int_0^t \lambda_u du)^k}{k!} \end{aligned}$$

Notiamo poi che, se $\lambda_t$ è costante, allora trovo il vecchio risultato, ovvero che

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \sim Poiss(\lambda t)$$

In generale invece ho che $N_{t+s} - N_S \sim Poiss(M_{t+s} - M_s)$, e dunque che

$$N_t \sim Poiss(M_t) \sim Poiss(\int_0^x \lambda_u du)$$

## Calcolo legge

Al fine di dimostrare l'enunciato vogliamo determinare, fissato $s \geq 0$, una equazione differenziale per la funzione $p_k(s,t) := P(N_{t+s} - N_s = k)$. Ovvero vogliamo esprimere la derivata di $p_k(s,t)$ in termini di $p_k(s,t)$. Dalla definizione di derivata sappiamo che

$$\frac{d}{dt} p_k(s,t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_k(s, t + \Delta t) - p_k(s,t)}{\Delta t}$$

Per $k \geq 1$ troviamo quindi

$$
\begin{aligned}
p_k(s, t+\Delta t) &= P(N_{s+t+\Delta t} - N_s = k) \\
&= P(N_{s+t} - N_s = k, N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = 0) \\
&+ P(N_{s+t} - N_s = k-1, N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = 1) \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2} P(N_{s+t} - N_s = j, N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = k-j) \\
\\
&= p_k(s,t) \cdot P(N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = 0) \\
&+ p_{k-1}(s,t) \cdot P(N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = 1) \\
&+ \sum_{j=0}^{k-2} p_j(s,t) \cdot P(N_{s+t+\Delta t} - N_{s+t} = k-j) \\
\\
&= p_k(s,t) \cdot (1 - \lambda_{s+t}\Delta t + o(\Delta t)) + p_{k-1}(s,t) \cdot (\lambda_{s+t}\Delta t + o(\Delta t)) + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

Manipolando questa equazione trovamo la seguente

$$
\begin{gathered}
p_k(s, t+\Delta t) = p_k(s,t) \cdot (1 - \lambda_{s+t}\Delta t) + p_{k-1}(s,t)\lambda_{s+t}\Delta t + o(\Delta t) \\
\iff \\
p_k(s, t+\Delta t) - p_k(s,t) = -p_k(s,t)\lambda_{s+t}\Delta t + p_{k-1}(s,t)\lambda_{s+t}\Delta t + o(\Delta t) \\
\iff \\
\frac{p_k(s, t+\Delta t) - p_k(s,t)}{\Delta t} = -p_k(s,t)\lambda_{s+t} p_{k-1}(s,t)\lambda_{s+t} + o(\Delta t)
\end{gathered}
$$

Infine, prendendo il limite per $\Delta t \to 0$, troviamo

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt} p_k(s,t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_k(s, t+\Delta t) - p_k(s,t)}{\Delta t} \\
&= \lim_{\Delta to \to 0} -p_k(s,t)\lambda_{s+t} p_{k-1}(s,t)\lambda_{s+t} + o(\Delta t) \\
&= -p_k(s,t)\lambda_{s+t} + p_{k-1}(s,t)\lambda_{s+t}
\end{aligned}
$$

Abbiamo quindi ottenuto il seguente sistema di Cauchy, che vale per $k \geq 1$.

$$
\begin{cases}
\frac{d}{dt} p_k(s,t) &= -\lambda_{s+t} \cdot p_k(s,t) + \lambda_{s+t} \cdot p_{k-1}(s,t) \\
p_k(s,s) &= 0
\end{cases}
$$

Notiamo che, in tale sistema, il valore di $\beta_t = \lambda_{s+t} \cdot p_{k-1}(s,t)$. Dunque, al fine di calcolare $p_k(s,t)$, dobbiamo aver precedentemente calcolato $p_{k-1}(s,t)$. Se vogliamo necessitiamo quindi di calcolarci prima il valore di $p_0(s,t)$.

## Calcolo di $p_o(s,t)$

Andando a fare lo stesso ragionamento svolto prima però questa volta per $p_0(s,t) = P(N_{t+s} - N_s = 0)$, troviamo che

$$\begin{aligned} p_0(s, t+\Delta t) &= P(N_{t+s} - N_s = 0, N_{t+s+\Delta t} - N_{t+s} = 0) \\ &= P(N_{t+s} - N_s = 0) \cdot P(N_{t+s+\Delta t} - N_{t+s} = 0) \\ &= p_0(s,t) \cdot (1 - \lambda_{s+t}\Delta t + o(\Delta t)) \end{aligned}$$

Ma allora,

$$\frac{p_o(s,t+\Delta t) - p_o(s,t)}{\Delta t} = -\lambda_{s+t} \cdot p_o(s,t) + o(\Delta t)$$

e quindi per $\Delta t \to 0$ otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} p_o(s,t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{p_o(s,t+\Delta t) - p_o(s,t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} -\lambda_{s+t} \cdot p_o(s,t) + o(\Delta t) \\ &= \lambda_{s+t} \cdot p_o(s,t) \end{aligned}$$

Così facendo abbiamo trovato il seguente sistema di Cauchy

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} p_o(s,t) & = \lambda_{s+t} \cdot p_o(s,t) \\ p_o(s,s) = 1 \end{cases}$$

Utilizzando la formula generale riportata in una lezione precedente, troviamo che

$$p_0(s,t) = e^{-\int_0^t \lambda_{s+t} dz}$$

Eseguendo il cambio di variabili $w = s + z$, con $dw = dz$, troviamo che

$$\begin{aligned} p_0(s,t) &= e^{-\int_0^t \lambda_{s+t} dz} \\ &= e^{-\int_s^{s+t} \lambda_w dw} \\ &= e^{-M_{s+t} - M_s} \\ &= P(Poiss(M_{s+t} - M_s) = 0) \end{aligned}$$

## Calcolo di $p_k(s,t)$, per $k \geq 1$

Adesso, utilizzando $p_o(s,t)$, possiamo risolvere il problema di Cauchy per trovare che

$$p_1(s,t) = \frac{(M_{s+t} - M_s)^1}{1!} \cdot e^{-(M_{t+s} - M_s)}$$

In generale quindi è possibile dimostrare per induzione, anche se non verrà fatto in questa sede, che vale la seguente formula

$$p_k(s,t) = \frac{(M_{s+t} - M_s)^k}{k!} \cdot e^{-(M_{s+t} - M_s)}$$

## 2 Esempio: problema del costo di attesa

Sia $N$ un processo di Poisson (stazionario) di parametro $\lambda > 0$, e sia $T > 0$ una costante deterministica.

Consideriamo la seguente situazione: abbiamo un flusso $N$ che conta i messaggi che entrano in una casella di posta. Al fine di memorizzare i messaggi, la casella di posta ha un buffer. Il costo per memorizzare i messaggi nel buffer dipende da una costante deterministica $C > 0$ e dal tempo di permanenza del messaggio all'interno del buffer. Ogni tempo multiplo di $T$, l'utente entra nella casella di posta e legge tutti i messaggi. Ci poniamo la seguente domanda: quanto costa, in media, conservare i messaggi nel periodo di tempo prima del primo controllo, ovvero in $[0, T]$?

Per rispondere a tale domanda notiamo che il costo dei messaggi dipende linearmente dal tempo di permanenza dei messaggi all'interno del buffer. Ora, se $N_T = 0$, ovvero se non ci sono stati messaggi, allora il tempo di conservazione totale è 0. Se invece $N_T > 0$, ovvero se al tempo $T$ sono entrati esattamente $N_T$ messaggi, allora il tempo di conservazione totale è pari a

$$(T - S_1) + (T - S_2) + ... + (T - S_{N_T})$$

Infatti l'$i-$esimo messaggio arriva nel tempo $S_i$, e deve rimanere nel buffer fino al tempo $T$, per un totale di tempo pari a $T - S_i$. Dunque, supponendo che $N_T > 0$, il costo medio per conservare i messaggi nel periodo $[0, T]$ è pari a

$$\begin{aligned}
&C \cdot \mathbb{E}[(T - S_1) + (T - S_2) + ... + (T - S_{N_T})] \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[(T - S_1) + (T - S_2) + ... + (T - S_{N_T}) \mid N_T = k] \cdot P(N_T = k) \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}[k \cdot T - (S_1 + ... + S_k) \mid N_T = k] \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot T - \mathbb{E}[(S_1 + ... + S_k) \mid N_T = k]) \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T}
\end{aligned}$$

Andiamo adesso ad utilizzare il seguente risultato, che ci dice la distribuzione di $(S_1, S_2, ..., S_k)$ se sappiamo che $N_T = k$.

## 3 Teorema: $(S_1, ..., S_k | N_T = k) \sim (U_{(1)}, ..., U_{(k)})$

Dato $N_T = k$, allora

$$(S_1, S_2, ..., S_k) \sim (U_{(1)}, U_{(2)}, ..., U_{(k)})$$

dove $U_1, ..., U_k$ sono i.i.d. uniformi in $[0, T]$ e $U_{(1)}, U_{(2)}, ..., U_{(k)}$ sono il riordinamento (la *statistica d'ordine*), di $U_1, ..., U_k$.

Andando ad applicare il teorema otteniamo

$$
\begin{aligned}
&C \cdot \mathbb{E}[(T - S_1) + (T - S_2) + ... + (T - S_{N_T})] \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot T - \mathbb{E}[(S_1 + ... + S_k) \mid N_T = k]) \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot T - k \cdot \mathbb{E}[U[0, T]] \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot T - k \cdot \frac{T}{2}) \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \\
&= C \cdot \sum_{k=1}^{\infty} (k \cdot \frac{T}{2}) \frac{(\lambda T)^k}{k!} \cdot e^{-\lambda T} \\
&= C \cdot \frac{T}{2} \lambda T \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\lambda T)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda T} \\
&= \frac{C \lambda T^2}{2}
\end{aligned}
$$