Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 18 del 22/05/2019
Markov nel Continuo

Leonardo Tamiano

Contents

1 Intuizione risultato $(S_1, ..., S_n | N_T = n) \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$

Andiamo a far vedere, almeno intuitivamente, il perché, se $N_T = n$, allora le v.a. $(S_1, S_2, ..., S_n)$ su cui è definito il processo di Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$ hanno la stessa distribuzione della statistica d'ordine di n v.a. uniformi in $[0, T]$. In particolare andiamo a dimostrare che

$$(S_k | N_T = n) \sim U_{(k)}$$

Proof. Fissiamo $0 < t \leq T$ e calcoliamo $P(U_{(k)} \leq t)$. Come prima cosa notiamo che

$$\begin{aligned} P(U_{(k)} \leq t) &= (\text{"almeno } k \text{ tra } U_1, ..., U_n \text{ sono} \leq t)) \\ &= \bigcup_{j=k}^{n} (\text{"esattamente } j \text{ tra } U_1, ..., U_n \text{ sono} \leq t) \end{aligned}$$

Ricordiamo poi, che essendo $U_j \sim U[0, T]$, abbiamo che

$$P(U_j \leq t) = \frac{t}{T}$$

Ma allora, dire che abbiamo esattamente j v.a. tra $U_1, ..., U_n$ che sono $\leq t$, significa dire che abbiamo uno schema di Bernoulli con n prove e una probabilità di successo t/T. Troviamo quindi il seguente,

$$\begin{aligned} P(U_{(k)} \leq t) &= \bigcup_{j=k}^{n} (\text{"esattamente } j \text{ tra } U_1, ..., U_n \text{ sono} \leq t) \\ &= \sum_{j=k}^{n} (\text{"esattamente } j \text{ tra } U_1, ..., U_n \text{ sono} \leq t) \\ &= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (\frac{t}{T})^j \cdot (1 - \frac{t}{T})^{n-j} \end{aligned}$$

Andiamo adesso a far vedere che

$$P(S_k \leq t | N_T = n) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (\frac{t}{T})^j \cdot (1 - \frac{t}{T})^{n-j}$$

Per iniziare notiamo la seguente uguaglianza

$$
\begin{aligned}
P(S_k \leq t | N_T = n) &= P(N_t \geq k | N_T = n) \\
&= \frac{P(N_t \geq k, N_T = n)}{P(N_T = n)} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{P(N_t = k, N_T = n)}{P(N_T = n)} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{P(N_T - N_t = n - j, N_t - N_0 = j)}{P(N_T = n)} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \frac{P(N_T - N_t = n - j) P(N_t = j)}{P(N_T = n)}
\end{aligned}
$$

Ricordando poi il fatto che i) $N_T - N_t \sim Poiss(\lambda(T-t))$, ii) $N_t \sim Poiss(\lambda t)$, iii) $N_T \sim Poiss(\lambda T)$, troviamo il seguente risultato

$$
\begin{aligned}
P(S_k \leq t | N_T = n) &= \frac{\sum_{j=k}^{n} \frac{(\lambda(T-t))^{n-j}}{(n-j)!} \cdot e^{-\lambda(T-t)} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{j!} e^{-\lambda t}}{\frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T}} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} \frac{(\lambda(T-t))^{n-j}}{(\lambda T)^{n-j}} \cdot \frac{(\lambda t)^j}{(\lambda T)^j} \\
&= \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (1 - \frac{t}{T})^{n-j} \cdot (\frac{t}{T})^j
\end{aligned}
$$

Combinando i risultati di prima abbiamo dimostrato che

$$P(S_k \leq t | N_T = n) = P(U_{(k)} \leq t) \iff U_{(k)} \sim (P_k | N_T = n)$$

che è proprio quello che volevamo ottenere. $\square$

Osservazione 1.1. Notiamo che far vedere che $U_{(k)} \sim (P_k | N_T = n)$ non è sufficiente per dimostrare l'intero risultato, ovvero che

$$(S_1, ..., S_n | N_T = n) \sim (U_{(1)}, ..., U_{(n)})$$

in quanto le v.a. $S_1, ..., S_n$ non sono indipendenti tra loro.

2 Formula alternativa per $\mathbb{E}[X]$

Sia X una v.a. dicreta a valori positivi $X : \Omega \to \mathbb{N}$. Allora vale la seguente formula

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} P(X \geq k) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$$

Proof. L'idea dietro alla dimostrazione è che, al posto di sommare per colonne, mi metto a sommare per righe (TODO: complete idea)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(K = k) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{k} 1 \cdot P(K = k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=j}^{\infty} \cdot P(K = k) \\
&= \sum_{j=1}^{\infty} P(X \geq j)
\end{aligned}$$

$\square$

Se invece X è una v.a. continua a valori > 0, $X : \Omega \to \mathbb{R}^+$, allora abbiamo la seguente versione continua della formula precedente

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} P(X \geq t)dt = \int_0^{\infty} P(X > t)dt$$

3 Media ampiezza intertempi fissato $N_T = n$

Andiamo adesso a far vedere che, fissato un $T \geq 0$ e un $n \geq 1$, abbiamo che $\forall 1 \leq k \leq n$

$$\mathbb{E}[S_k - S_{k-1} \mid N_T = n] = \frac{T}{n-1}$$

Notiamo infatti che

$$\mathbb{E}[S_k - S_{k-1} \mid N_T = n] = \mathbb{E}[S_k \mid N_T = n] - \mathbb{E}[S_{k-1} \mid N_T = n]$$

da prima poi sappiamo che, dato $N_T = n$, abbiamo che $S_k \sim U_{(k)}$ e $S_{k-1} \sim U_{(k-1)}$. Ma allora, utilizzando la formula per la media riportata nella sezione precedente, possiamo calcolare la media in questo modo

$$\mathbb{E}[S_k - S_{k-1} \mid N_T = n] = \int_0^{\infty} P(S_k > t \mid N_T = n)dt - \int_0^{\infty} P(S_{k-1} > t \mid N_T = n)$$

Notiamo poi che, se $t > T$, allora $P(S_k > t \mid N_T = n) = 0$, e quindi otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_0^{\infty} P(S_k > t \mid N_T = n)dt - \int_0^{\infty} P(S_{k-1} > t \mid N_T = n)dt = \\
= \int_0^{T} P(S_k > t \mid N_T = n)dt - \int_0^{T} P(S_{k-1} > t \mid N_T = n)dt = \\
= \int_0^{T} P(S_{k-1} > t \mid N_T = n) - P(S_k > t \mid N_T = n)dt
\end{aligned}$$

Osserviamo ora che la probabilità che, dato $N_T = n$, $S_{k-1} > t$, equivale alla probabilità che almeno $k-1$ v.a. uniformi in $[0, T]$ siano $> t$. Abbiamo quindi n prove indipendenti, in cui ogni singola prova ha probabilità di successo t/T. Troviamo quindi

$$P(S_{k-1} > t \mid N_T = n) = \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} (\frac{t}{T})^j (1 - \frac{t}{T})^{n-j}$$

sostituendo nella formula di prima troviamo

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[S_k - S_{k-1} \mid N_T = n] &= \int_0^T P(S_{k-1} > t \mid N_T = n) - P(S_k > t \mid N_T = n) dt \\
&= \int_0^T \sum_{j=k-1}^{n} \binom{n}{j} (\frac{t}{T})^j (1 - \frac{t}{T})^{n-j} - \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} (\frac{t}{T})^j (1 - \frac{t}{T})^{n-j} dt \\
&= \int_0^T \binom{n}{k-1} \frac{t}{T}^j (1 - \frac{t}{T})^{n-k+1} dt
\end{aligned}$$

Facendo la sostituzione $s = t/T \implies \begin{cases} dt = T \cdot ds \\ t = 0 \implies s = 0 \\ t = T \implies s = 1 \end{cases}$ otteniamo

$$\mathbb{E}[S_k - S_{k-1} \mid N_T = n] = \binom{n}{k-1} T \cdot \int_0^1 s^{k-1} (1-s)^{n-k+1} ds$$

e integrando per parti si scrive la soluzione riportata prima.

4 Catene di Markov a Tempo Continuo

Dato uno spazio di probabilità (Ω, F, P), consideriamo un processo stocastico $(X_t)_{t \geq 0}$ dove, fissato $t \geq 0$, X_t è una v.a. aleatoria che assume valori in un insieme S discreto. In particolare immaginiamo S come un insieme di punti nel piano. Tale insieme S è diviso in due tipologie di punti: quelli assorbenti e quelli non assorbenti. Il processo $(X_t)_{t \geq 0}$ rappresenta dunque un particolare movimento su S che verifica le seguenti proprietà:

(i) Da un punto assorbente non ci si sposta più;

(ii) In ogni punto non assorbente i si resta un tempo aleatorio esponenziale di parametro ν_i;

(iii) Ogni volta che si esaurisce il tempo di permanenza nel punto i, si esce nel punto j con probabilità $p_{i,j} \in [0, 1]$. Notiamo che $p_{i,i} = 0$;

(iv) I tempi di permanenza e gli spostamenti sono stocasticamente indipendenti.

4.1 Descrizione 1

I parametri necessari per definire movimento descritto in precedenza sono i seguenti:

1. S, l'insieme degli stati.
2. $A \subset S$, l'insieme degli stati assorbenti.
3. $\nu_i, \forall i \in S \setminus A$, parametri dei tempi di attesa.
4. $p_{i,j}, \forall i \in S \setminus A$, probabilità di spostamento.

Notiamo poi che, se i è uno stato non assorbenete, allora $\nu_i > 0$. Invece, se i è uno stato assorbente, allora $\nu_i = 0$. Infatti, se $\nu_i = 0$, allora $\mathbb{E}[Exp(\nu_i)] = 1/\nu_i = \infty$, il che coincide con quello che vogliamo, dato che una volta entrati in uno stato assorbente non usciamo più.

4.2 Descrizione 2

Tenendo in considerazione quanto detto nel paragrafo precedente, notiamo che al posto di descrivere stati assorbienti e non assorbenti in modo separato, possiamo semplicemente dare i valori ν_i per ogni stato i. Così facendo ottengo la seguente descrizione, più sintetica della prima:

1. $S = \{1, 2, 3, ..., i, ...\}$, insieme degli stati
2. $\nu_i, \forall i \in S$ tale che $\nu_i = \begin{cases} > 0 & \text{, per } i \text{ non assorbente} \\ = 0 & \text{, per } i \text{ assorbente} \end{cases}$
3. $P = (p_{i,j})_{i,j}$, matrice tale che $p_{i,i} = \begin{cases} 0 & \text{, se } \nu_i > 0 \\ 1 & \text{, se } \nu_i = 0 \end{cases}$