Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 19 del 28/05/2019
Proprietà di Markov

Leonardo Tamiano

Contents

Il movimento definito nella scorsa lezione verifica la seguente proprietà, detta *proprietà di Markov*: $\forall n \geq 0, \forall j, i_0, ..., i_{n-1}, i_n \in S, \forall t_0, t_1, ..., t_n, t_{n+1} \in \mathbb{R}$,

$$P(X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i, X_{t_{n-1}} = i_{n-1}, ..., X_{t_0} = i_o) = P(X_{t_{n+1}} = j \mid X_{t_n} = i)$$

Con questa proprietà stiamo dicendo che la probabilità che $X_{t_{n+1}} = j$ dato che $X_n = i$ dipende solamente da i, j e dall'ampiezza dell'intervallo di tempo tra t_n e t_{n+1}.

1 Markov $\implies$ Tempi permanenza esponenziali

Inizialmente abbiamo definito una catena di markov a tempo continuo come un movimento $(X_t)_{t\geq 0}$ su un insieme di stati S con tutta una serie di proprietà, tra cui era presenta la proprietà che affermava che il tempo di permanenza del movimento in uno stato i non assorbente è una v.a. di legge esponenziale di parametro ν_i.

Andiamo adesso a far vedere che, se un movimento $(X_t)_{t\geq 0}$ definito su un insieme di stati S rispetta la proprietà di Markov, allora necessariamente i tempi di permanenza negli stati sono v.a. di legge esponenziale. In particolare dimostriamo che, fissato "i" stato non assorbente, e posto τ_i^P come la v.a. che tiene conto del tempo di permanenza in i, ovvero, formalmente

$$\tau_i^P = \inf\{s \geq 0, X_s \neq i, X_\mu = i, \ \forall\ 0 \leq \mu < s\}$$

abbiamo che $\forall t > 0 : \exists C_i > 0 :$

$$P(\tau_i^P > t | X_0 = i) = e^{-C_i t} \iff \tau_i^P \sim Exp(C_i)$$

Proof. Iniziamo definendo la seguente funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(t) := P(\tau_i^P > t | X_0 = i)$$

Notiamo che

$$f(t) = P(X_\mu = i,\ 0 \leq \mu \leq t \mid X_0 = i)$$

Ora, dal fatto che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$, e che le traittorie del movimento $(X_t)_{t\geq 0}$ sono continue a destra, tale evento coincide con la probabilità che $X_q = i$ su tutti i razionali q in $[0, t]$. Ma allora possiamo riscrivere l'evento nel seguente modo

$$(X_\mu = i,\ 0 \leq \mu \leq t \mid X_0 = i) = \bigcap_n (x_s = i,\ s = \frac{kt}{n},\ k = 1, ..., n)$$

Applicando il lemma di continuità della probabilità, insieme alla proprità di markov, otteniamo

$$\begin{aligned} f(t) &= \lim_{n\to\infty} P(x_s = i,\ s = \frac{kt}{n},\ k = 1, ..., n) \\ &= \lim_{n\to\infty} [P(X_{\frac{t}{n}} = i | X_0 = i) \cdot P(X_{\frac{2t}{n}} = i | X_{\frac{t}{n}} = i) \cdot ... \cdot P(X_t = i | X_{\frac{n-1}{n}} = i)] \\ &= \lim_{n\to\infty} (p_{i,i}(\frac{t}{n}))^n \end{aligned}$$

dove con $p_{i,i}(\frac{t}{n})$ rappresentiamo la probabilità di saltare da i a i in un tempo t/n.

Andiamo adesso a dimostrare che, per $\alpha > 0$ razionale, abbiamo che

$$f(\alpha t) = (f(t))^\alpha$$

Notiamo infatti che per ogni α razionale, $\alpha \in \mathbb{Q}$, abbiamo che esiste una successione $(m_n)_{n\geq 1}$ di razionali, con $m_n := n/\alpha$ tale che

1. $m_n \to \infty$ se $n \to \infty$
2. $\lim_{n\to\infty}(p_{i,i}(\frac{\alpha t}{n}))^n = lim_{m_n\to\infty}(p_{i,i}(\frac{t}{m_n}))^{\alpha m_n}$

Ma allora, dato che la funzione potenza è una funzione monotona, e il limite si "comporta bene" con le funzioni monotone, troviamo il seguente

$$\begin{aligned} f(\alpha t) &= \lim_{n\to\infty} p_{i,i}(\frac{\alpha t}{n})^n \\ &= \lim_{m_n\to\infty} p_{i,i}(\frac{t}{m_n})^{\alpha m_n} \\ &= (\lim_{m_n\to\infty} p_{i,i}(\frac{t}{m_n})^{m_n})^\alpha \\ &= (f(t))^\alpha \end{aligned}$$

Arrivati a questo punto sappiamo che

- $f(t) = lim_{n\to\infty} p_{i,i}(t/n)^n$.
- $f(\alpha t) = (f(t))^\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbb{Q}$.

Sia ora $T > 0$ tale che $f(T) < 1$. Notiamo che tale T esiste in quanto "i" non è uno stato assorbente. Ma allora, definendo $\alpha := t/T \iff \alpha T = t$, troviamo che

$$\begin{aligned} f(t) = f(\alpha T) &= f(T)^\alpha \\ &= f(T)^{t/T} \\ &= e^{t/T \cdot \ln f(T)} \\ &= e^{-(\frac{-\ln(f(T))}{T})t} \end{aligned}$$

Ma allora, posto $C_i := \frac{-\ln f(T)}{T}$, con T tale che $f(T) < 1$, abbiamo che

$$f(t) = e^{-C_i t} \iff \tau_i^P \sim Exp(C_i)$$

che è proprio quello che volevamo dimostrare. $\square$

2 Esempio: Processo di Poisson come catena di Markov

Notiamo che possiamo rappresentare un processo di Poisson utilizzando le catene di markov a tempo continuo. Infatti basta avere la seguente catena:

- $S = \mathbb{N}$, ovvero l'insieme degli stati è $\mathbb{N}$.
- $\nu_i = \nu > 0$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, ovvero non ci sono stati persistenti, e il parametro del tempo di attesa in ogni stato è lo stesso.
- P è tale che $p_{i,i+1})1$, per ogni $i \in \mathbb{N}$, ovvero una volta che è terminato il tempo di attesa nello stato i saltiamo allo stato $i + 1$ in modo deterministico.
- $\Pi_0 = \delta_0 = (1, 0, 0, ..., 0, 0, ...)$, ovvero all'inizio ci troviamo nello stato 0 con probabilità 1.

3 Funzione di transizione

Sia $(X_t)_{t\geq 0}$ una catena di markov a tempo continuo. Fissato un tempo $t \geq 0$ definiamo con $p_{i,j}(t)$ la probablità di transizione da i a j nel tempo t. Formalmente,

$$p_{i,j}(t) := P(X_t = j|X_0 = i)$$

Andiamo poi a raggruppare queste probabilità in una matrice $P(t) := (p_{i,j}(t))_{i,j}$. La funzione che dato il tempo t calcola la matrice $P(t)$ viene chiamata *funzione di transizione al tempo t.*

Utilizzando questa matrice $P_t := P(t)$ possiamo calcolare la legge della catena al tempo t. Infatti vale il seguente

$$\begin{aligned}
\Pi_t(j) = P(X_t = j) &= \sum_{i\in S} P(X_t = j|X_0 = i) \cdot P(X_0 = i) \\
&= \sum_{i\in S} p_{i,j}(t) \cdot \Pi_0(i) \\
&= (\Pi_0 \cdot P(t))_j
\end{aligned}$$

Dunque abbiamo che $\Pi_j = \Pi_0 \cdot P(t)$.

4 Relazione tra P e P_t

Notiamo che le matrici P e $P(t)$ sono oggetti moldo diversi tra loro. Infatti abbiamo che la prima matrice, P, contiene gli elementi $(p_{i,j})_{i,j}$, con $p_{i,j} = P(X_{\tau_i^P} = j|X_0 = i)$, mentre la seconda matrice, $P(t)$, contiene elementi della forma $(p_{i,j}(t))_{i,j}$, con $p_{i,j}(t) = P(X_t = j|X_0 = i)$.

Ricordiamo che, lavorando con le catene di markov discrete, avevamo trovato la seguente relazione per la matrice di transizione in più passi: $P(t) = (P)^t$. Nel caso di catene di markov continue, la matrice $P(t)$ è più difficile da calcolare, rispetto al caso discreto. Vale infatti la seguente relazione

$$\frac{d}{dt}p_{i,j}(t) = \sum_{k \in S} q_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) \iff \dot{P}_t = Q \cdot P_t$$

con

$$q_{i,k} := \begin{cases} -\nu_i & , k = i \\ \nu_i p_{i,k} & , k \neq i \end{cases}$$

Al fine di calcolare $P(t)$ trovo quindi un insieme di sistemi di equazioni differenziali. In particolare, fissato l'indice j, ho $\#S$ equazioni differenziali. Le condizioni iniziali per queste equazioni differenziali sono le seguenti

$$p_{i,j}(0) = \begin{cases} 0 & , j \neq i \\ 1 & , j = 1 \end{cases}$$

Gli elementi $q_{i,k}$ vengono raccolti in una matrice $Q = (q_{i,k})_{i,k}$ che prende il nome di *matrice dei parametri infinitesimali della catena*.