Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 21 del 05/06/2019
Catene di Nascita e Morte

Leonardo Tamiano

Contents

1 Catene di nascita e morte a tempo continuo

Definizione 1.1. Una catena di markov di nascita e morte a tempo continuo $(X_t)_{t\geq 0}$ è definita da due parametri. In particolare definiamo i seguenti tassi di salto

$$\lambda_i := q_{i,i+1}$$
$$\mu_i := q_{i,i-1}$$

λ_i è anche chiamato *tasso di nascita*, mentre μ_i è detto *tasso di morte*. Notiamo che da questo segue che

$$\sum_{j\neq i} q_{i,j} = -q_{i,i} => q_{i,i} = -(\lambda_i + \mu_i)$$

Se poi l'insieme degli stati è finito, ovvero se $S = \{a, a+1, ..., a+d\}$, allora per convenzione si pone $q_{a,a-1} := 0$,e $q_{a+d,a+d+1} := 0$.

Dalle definizione segue che, se vogliamo descrivere una catena di nascita e morte tramite i tassi di attesa ν_i e la matrice di salto P abbiamo la seguente descrizione:

- $\forall i \in S$
$$\nu_i = \begin{cases} \lambda_i + \mu_i & , \ i \text{ non assorbente} \\ 0 & , \ i \text{ assorbente} \end{cases}$$

- $\forall i, j \in S : j \neq i$
$$p_{i,j} = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\lambda_i+\mu_i} & , j = i+1 \\ \frac{\mu_i}{\lambda_i+\mu_i} & , j = i-1 \\ 0 & , \text{altrimenti} \end{cases}$$

2 Processi di pura nascita

Definizione 2.1. Un processo di nascita e morte a tempo continuo è detto processo di *pura nascita con tassi di nascita costanti* se

(i) $S = \mathbb{N}$

(ii) $\forall i \in S, \mu_i = 0$

(iii) $\forall i \in S, \lambda_i = \lambda > 0$

Notiamo che dalla definizione segue che un processo di pura nascita non può avere stati assorbenti. Infatti per ogni $i \in S$, $\nu_i = -q_{i,i} = -(-\lambda) = \lambda > 0$.

3 Equazioni di Kolmogorov

Abbiamo già dimostrato la seguente relazione, nota col nome di *equazione di Kolmogorov all'indietro*

$$\hat{P}_t = Q \cdot P_t \iff \begin{cases} \frac{d}{dt} p_{i,j}(t) & = \sum_{k \in S} q_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) \\ p_{i,j} & = \delta_{\{i\}}(j) \end{cases}$$

Esiste però un'altra relazione, nota col nome di *equazione di Kolmogorov all'avanti*, che è la seguente

$$\hat{P}_t = P_t \cdot Q \iff \begin{cases} \frac{d}{dt} p_{i,j}(t) & = \sum_{k \in S} p_{i,k}(t) \cdot q_{k,j} \\ p_{i,j} & = \delta_{\{i\}}(j) \end{cases}$$

Andiamo adesso a dimostrare quest'ultima relazione.

Proof. Ricordiamo che, nel caso di catene di markov discrete, vale l'equazione di *Chapman-Kolmogorov*

$$p_{i,j}^{(n+m)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}^{(n)} \cdot p_{k,j}^{(m)}$$

Nel caso continuo abbiamo una relazione analoga, con però $t, s \in \mathbb{R}$

$$p_{i,j}^{(t+s)} = \sum_{k \in S} p_{i,k}(t) \cdot p_{k,j}(s)$$

Dato che sappiamo che esiste la derivata di $p_{i,j}(t+s)$, possiamo derivare in s e mantenere t fisso, per ottenere

$$\frac{d}{ds} p_{i,j}(t+s) = \sum_{k \in S} p_{i,k}(t) \cdot \frac{d}{ds} p_{k,s}(s)$$

Andando a calcolare tale relazione per $s = 0$ e ricordando che $\hat{p}_{k,j}(0) = q_{k,j}$, otteniamo

$$\begin{aligned} \dot{p}_{i,j}(t) &= \sum_{k \in S} p_{i,k}(t) \cdot \hat{p}_{k,j}(0) \\ &= \sum_{k \in S} p_{i,k}(t) \cdot q_{k,j} \end{aligned}$$

□

4 Calcolo di P_t per processi di pura nascita

Andiamo adesso a far vedere che i processi di pura nascita con tassi di nascita costante sono processi di Poisson. In particolare, sia $(X_t)_{t \geq 0}$ un processo di pura nascita con tasso di nascita costante λ. Andiamo a far vedere che

$$\begin{aligned} p_{0,j}(t) &= P(X(t+s) = j \mid X(s) = 0) \\ &= P(X(t) = j \mid X(0) = 0) \\ &= P(N_t = j) \\ &= \frac{(\lambda t)^j}{k!} e^{-(\lambda t)} \end{aligned}$$

Proof. Utilizzando le equazioni di Kolmogorov troviamo la seguente relazione

$$\begin{aligned} \dot{p}_{i,j}(t) &= \sum_{k \in S} q_{i,k} \cdot p_{k,j}(t) \\ &= q_{i,i-1} \cdot p_{i-1,j}(t) + q_{i,i} \cdot p_{i,j}(t) + q_{i,i+1} \cdot p_{i+1,j}(t) \\ &= -\lambda \cdot p_{i,j}(t) + \lambda \cdot p_{i+1,j}(t) \end{aligned}$$

Troviamo quindi il seguente sistema di Cauchy

$$\begin{cases} \dot{p}_{i,j}(t) & = -\lambda \cdot p_{i,j}(t) + \lambda \cdot p_{i+1,j}(t) \\ p_{i,j}(0) & = \delta_{\{i\}}(j) \end{cases}$$

Osserviamo poi che, dato che $\forall j < i : p_{i,j}(t) = 0$, mi devo calcolare $p_{i,j}(t) \forall j \geq i$, fissato un i particolare. Andiamo quindi a dimostrare per induzione che

$$\forall i \in N : p_{i,i+k}(t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-(\lambda t)}$$

(i) **Caso base, k = 0**

In questo caso il sistema diventa il seguente

$$\begin{cases} \dot{p}_{i,i}(t) & = -\lambda p_{i,i}(t) \\ p_{i,i}(0) = 1 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$p_{i,i+0}(t) = e^{-\lambda t} = \frac{(\lambda t)^0}{0!} e^{-\lambda t}$$

(ii) **Passo induttivo, assumo $k-1$ e provo k**

In questo caso il sistema di Cauchy diventa il seguente

$$\begin{cases} \dot{p}_{i,i+k}(t) & = -\lambda p_{i,i}(t) + \lambda p_{i,i+k-1}(t) = -\lambda p_{i,i}(t) + \lambda \frac{(\lambda t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \\ p_{i,i+k} & = 0 \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$\begin{aligned} p_{i,i+k}(t) &= e^{-\lambda t} \int_0^t e^{\lambda s} \frac{\lambda^k s^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda s} ds \\ &= e^{-\lambda t} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \int_0^t s^{k-1} ds == \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \end{aligned}$$

□