Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 22 del 11/06/2019
Code Markoviane

Leonardo Tamiano

Contents

1 Catene di nascita e morte omogenee nel tempo

Definizione 1.1. Una catena di nascita e morte a tempo continuo è detta *omogenea nel tempo* se vale la seguente proprietà: fissato $t \geq 0$, per ogni $s \geq 0$,

$$p_{i,j}(t) = P(X_{t+s} = j \mid X_s = i) = P(X_t = j \mid X_0 = i)$$

con questo vogliamo dire che la probabilità di passare da i a j in un tempo t non dipende dal tempo iniziale in cui ci troviamo in i ma dipende solamente dall'ampiezza dell'intervallo.

2 Catene di branching

Le *catene di branching*, detti anche processi di ramificazione, sono delle particolari catene di nascita e morte a valori in $\mathbb{N}$ con tassi lineari. In questi processi $(X_t)_{t\geq 0}$ la v.a. X_t conta il numero di invidiui al tempo t in una popolazione che rispetta le seguenti ipotesi:

(i) Ciascun individuo, indipendentemente dagli altri, dà origine ad un nuovo individuo o muore dopo un tempo esponenziale, detto *tempo di quiescenza*, di parametro α.

(ii) Ogni individuo si duplica con probabilità p, oppure muore con probabilità $1 - p$. Il duplicarsi o il morire sono eventi indipendenti dal tempo di quiescenza.

(iii) Nella popolazione entrano nuovi individui secondo un flusso di Poisson di parametro β, in modo indipendente dalla vita della popolazione.

Quindi, se $X_t = i$, abbiamo che esistono i v.a. $T_1, T_2, ..., T_i$, i.i.d., con $T_1 \sim Exp(\alpha)$, ciascuna delle quali rappresenta il tempo di quiescenza di un individuo della popolazione, e poi abbiamo una v.a. $S \sim Exp(\beta)$ che rappresenta il primo tempo di ingresso di un nuovo individuo nella popolazione generato dal processo di Poisson. A questo punto è fondamentale la seguente osservazione

Osservazione 2.1. Due v.a. indipendenti e continue con la stessa densità non possono assumere lo stesso valore. Detto altrimenti, se T_1, T_2 sono i.i.d. con $T_1 \sim Exp(\alpha)$, allora $P(T_1 - T_2 = 0) = 0$.

Ma allora, se al tempo t mi trovo nello stato i, al prossimo cambiamento di stato mi dovrò necessariamente trovare o nello stato $i - 1$ oppure nello stato $i + 1$. Infatti solo un individuo alla volta può finire il suo tempo di quiescenza e dunque decidere se duplicarsi, facendo andare la dinamica nello stato $i + 1$, oppure morire, facendo muovere la dinamica nello stato $i - 1$. Inoltre non può essere che l'individuo che viene generato dal processo di Poisson arriva nello stesso momento in cui un individuo della popolazione termina il suo tempo di quiescenza. Detto altrimenti, non può essere che $\exists j \in \{1, ..., i\}$ tale che $S = T_j$, in quanto $S \perp\!\!\!\perp T_j$ per ogni $J \in \{1, ..., i\}$. Da questo ragionamento segue che abbiamo a che fare con una catena di nascita e morte.

2.1 Calcolo dei tassi di vita e di morte

Andiamo adesso a descrivere questa dinamica utilizzando i parametri α, β e p.

Per prima cosa calcoliamo ν_i, ovvero il parametro del tempo esponenziale di soggiorno nello stato i, ovvero della v.a. $\tau_i^P \sim Exp(\nu_i)$. Notiamo che

$$\tau_i^P = \min\{T_1, T_2, ..., T_i, S\}$$

A questo punto utilizziamo la seguente proposizione, data senza dimostrazione.

Proposizione 2.1. Se $X \sim Exp(\gamma)$, e $Y \sim Exp(\rho)$, con X e Y indipendenti tra loro, allora

$$\min\{X, Y\} \sim Exp(\gamma + \rho)$$

Nel nostro caso troviamo dunque che

$$\tau_i^P \sim Exp(\underbrace{\alpha + \alpha + ... + \alpha}_{i \text{ volte}} + \beta) \sim Exp(i\alpha + \beta)$$

dunque abbiamo che $\nu_i = i \cdot \alpha + \beta$

Procediamo calcolando le probabilità di spostamento $p_{i,i+1}$ e $p_{i,i-1}$. Notiamo che ci basta calcolare $p_{i,i-1}$, in quanto $p_{i,i+1} = 1 - p_{i,i-1}$. A tale fine troviamo quindi

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= P(X_{\tau_i^P} = i - 1 \mid X_0 = i) \\ &= P(X_{\tau_i^P} = i - 1, \tau_i^P \neq S \mid X_0 = i) \\ &= P(X_{\tau_i^P} = i - 1 \mid \tau_i^P \neq S, X_0 = i) \cdot P(\tau_i^P \neq S \mid X_0 = i) \end{aligned}$$

Notiamo poi che se $\tau_i^P \neq S$, allora esiste un tempo di quiescenza T_j tale che $T_j \leq S$. Ma allora, utilizzando il fatto già dimostrato che

$$P(exp(\gamma) < exp(\rho)) = \frac{\gamma}{\gamma + \rho}$$

troviamo che

$$\begin{aligned} P(\tau_i^P \neq S \mid X_0 = i) &= P(\min\{T_1, ..., T_i) < S \mid X_0 = i\} \\ &= P(Exp(i \cdot \alpha) < Exp(\beta)) \\ &= \frac{i \cdot \alpha}{i \cdot \alpha + \beta} \end{aligned}$$

Inoltre abbiamo che

$$P(X_{\tau_i^P} = i - 1 \mid \tau_i^P \neq S, X_0 = i) = 1 - p$$

Mettendo tutto insieme troviamo quindi

$$\begin{aligned} p_{i,i-1} &= (1 - p) \cdot \frac{i \cdot \alpha}{i \cdot \alpha + \beta} \\ p_{i,i+1} &= 1 - p_{i,i-1} = \frac{\beta + p \cdot i\alpha}{i\alpha + \beta} \end{aligned}$$

Così facendo siamo in grado di calcolari i tass di nascita e di morte per questa catena, che sono

$$\lambda_i = \beta + p \cdot i\alpha$$
$$\mu_i = (1-p) \cdot i\alpha$$

3 Code Markoviane

Un altro tipo di catena di nascita e morta interessante è la *coda markoviana*, che conta il numero di clienti all'interno di un servizio. Abbiamo due tipologie di code, quelle con un numero ∞ di sportelli, rappresentate con $M|M|\infty$, e quelle con un numero finito $N > 0$ di sportelli, rappresentate con $M|M|N$. In ogni caso, in entrambe le code $M|M|\cdot$, la prima M sta per "Markov" e rappresenta il fatto che il flusso di ingressi dei clienti nella coda è un processo di Poisson di parametro $\lambda > 0$; la seconda M sta sempre per "Markov", ma questa volta per il fatto che il tempo di servizio di ciascun sportello è esponenziale di parametri μ ed è indipendente dagli altri sportelli. Andiamo dunque a calcolare il tasso di nascita e morte per i due casi menzionati, ovvero la coda con sportelli infiniti e la coda con sportelli finiti.

3.1 Tassi di nascita e morte per $M|M|\infty$

In questo caso abbiamo che $X_t :=$ # sportelli attivi. Se $X_t = i$, per la perdità di memoria abbiamo che

$$\tau_i^P = min(S_1, T_1, ..., T_i) \sim Exp(\lambda + i \cdot \mu)$$

Ma allora $\nu_i = \lambda + i \cdot \mu$. Siamo ora pronti per calcolare i tassi di nascita e morte. Abbiamo infatti che

- $i = 0$

  In questo caso abbiamo che $p_{0,1} = 1$ e $\nu_0 = \lambda$. Dunque troviamo

  $$\lambda_0 = q_{0,1} = \nu_0 \cdot p_{0,1} = \nu_0 = \lambda$$
  $$\mu_0 = 0$$

- $i \neq 0$

  In questo caso abbiamo che

  $$p_{i,i+1} = P(S_1 < min(T_1, ..., T_i)) = \frac{\lambda}{\lambda + i \cdot \mu}$$

  inoltre, dato che $p_{i,i-1} = 1 - p_{i,i+1}$, abbiamo che

  $$p_{i,i-1} = \frac{i \cdot \mu}{\lambda + i \cdot \mu}$$

ma allora mettendo tutto insieme troviamo che

$$\lambda_i = \nu_i \cdot p_{i,i+1} = (\lambda + i \cdot \mu) \cdot \frac{\lambda}{\lambda + i \cdot \mu} = \lambda$$
$$\mu_i = \nu_i \cdot p_{i,i-1})(\lambda + i \cdot \mu) \cdot \frac{i \cdot \mu}{\lambda + i \cdot \mu} = i \cdot \mu$$

Dunque, per ricapitolare, nel caso di code markoviane del tipo $M|M|\infty$ troviamo che

$$\nu_i = \lambda + i \cdot \mu$$
$$\lambda_i = \lambda$$
$$\mu_i = i \cdot \mu$$

3.2 Tassi di nascita e morte per $M|M|N$

Per quest'altra tipologia di coda, in cui abbiamo un numero di sportelli finito, abbiamo che la v.a. X_t conta sia il numero di clienti che sono agli sportelli sia il numero di clienti in attesa. Troviamo dunque la seguente situazione

$$\nu_i = \begin{cases} \lambda + i \cdot \mu & , \ i < N \\ \lambda + N \cdot \mu & , \ i \geq N \end{cases}$$
$$\lambda_i = \lambda$$
$$\mu_i = \begin{cases} i \cdot \mu & , \ i < N \\ N \cdot \mu & , \ i \geq N \end{cases}$$