Tor vergata
Laurea magistrale in Informatica
Calcolo delle Probabilità 2
A.A. 2018-2019

Lezione 23 del 12/06/2019
Dinamica per code Markoviane Infinite

Leonardo Tamiano

Contents

1 Funzione di transizione P_t per coda $M|M|\infty$

Data una coda $M|M|\infty$ è possibile calcolare la funzione di transizione P_t senza utilizzare le equazioni di Kolmogorov. In particolare vogliamo mostrare che, per ogni $i, j \in \mathbb{N}$, abbiamo il seguente risultato

$$\lim_{t\to\infty} p_{i,j}(t) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}}$$

Proof. Sia $X(t) := \#$ clienti nella coda al tempo t. Possiamo esprimere $X(t)$ come una somma di due v.a.. Infatti, definendo $X^{(1)}(t)$ come la v.a. che conta il numero di clienti nel servizio al tempo t già presenti al tempo 0, e con $X^{(2)}(t)$ la v.a. che conta il numero di clienti arrivati al servizio in un tempo $(0, t]$ e ancora al servizio al tempo t, notiamo che vale la seguente

$$X(t) = X^{(1)}(t) + X^{(2)}(t)$$

Ma allora possiamo esprimere $p_{i,j}(t)$ nel seguente modo

$$\begin{aligned}
p_{i,j}(t) &= P(X(t) = j|X(0) = i) \\
&= P_i(\bigcup_{k=0}^{i\wedge j}(X^{(1)}(t) = k,\ X^{(2)}(t) = j-k)) \\
&= \sum_{k=0}^{i\wedge j} P_i(X^{(1)}(t) = k,\ X^{(2)}(t) = j-k)
\end{aligned}$$

Definiamo poi $p_t^{(1)}$ come la probabilità che un cliente di tipo (1) sia ancora in servizio al tempo t. Notiamo che dato che il tempo di attesa al servizio segue una legge esponenziale di parametro μ, abbiamo che

$$p_t^{(1)} = e^{-\mu t} = 1 - F_{Exp(\mu)}(t)$$

Ma allora la v.a. $X^{(1)}(t)$ è una binomiale di parametri $(i, p_t^{(1)})$. Possiamo quindi scrivere

$$\begin{aligned}
P_i(X^{(1)}(t) = k) &= P(Bin(i, p_t^{(1)}) = k) \\
&= \binom{i}{k}(p_t^{(1)})^k(1-p_t^{(1)})^{i-k}
\end{aligned}$$

Per $X^{(2)}(t)$ invece, definiamo sempre $p_t^{(2)}$ come la probabilità che un cliente di tipo (2) sia ancora in servizio al tempo t. Andiamo quindi ad eseguire la sostituzione $n := j - k$ e, denotando con $N(t)$ il numero di clienti che sono arrivati al servizio nel tempo $(0, t]$, utilizzando la formula delle probabilità totali otteniamo il seguente risultato

$$\begin{aligned}
P_i(X^{(2)}(t) = k) &= \sum_{h\geq n} P_i(X^{(2)}(t) = n \mid N(t) = h) \cdot P(N(t) = h) \\
&= \sum_{h\geq n} P(Bin(h, p_t^{(2)}) = n) \cdot \frac{(\lambda t)^h}{h!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}$$

Notiamo però che $p_t^{(2)} \neq p_t^{(1)}$, infatti, se indichiamo con τ il tempo di ingresso di un cliente che entra nel servizio in $(0, t]$, abbiamo che

$$p_t^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} P(\text{il client sia al servizio al tempo } t \mid \tau = s) \cdot f_\tau(s) ds$$

A questo punto ricordiamo che, condizionatamente al numero di arrivi di un Poisson in $[0, t]$, i tempi di arrivo sono v.a. uniformi in $[0, t]$. In particolare quindi, se sappiamo che $N_t = h$, allora i tempi di arrivo $S_1, S_2, ..., S_h$ sono v.a. uniformi in $[0, t]$. Ma allora, dato che τ è un tempo di arrivo, la sua densità è la densità di una v.a. uniforme in $[0, t]$. Otteniamo quindi il seguente

$$\begin{aligned}
p_t^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} P(\text{il client sia al servizio al tempo } t \mid \tau = s) \cdot f_\tau(s) ds \\
&= \int_0^t P(\text{il client sia al servizio al tempo } t \mid \tau = s) \cdot \frac{1}{t} ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu(t-s)} \cdot \frac{1}{t} ds \\
&= \frac{1 - e^{-\mu t}}{\mu t}
\end{aligned}$$

Sostituendo nella formula di prima troviamo dunque

$$\begin{aligned}
P(X^{(2)}(t) = n) &= \sum_{h \geq n} \binom{h}{n} \cdot (p_t^{(2)})^n (1 - p_t^{(2)})^{h-n} \cdot \frac{(\lambda t)^h}{h!} e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} (\lambda t)^n (p_t^{(2)})^n \sum_{h \geq n} \frac{(1 - p_t^{(2)})^{h-n})(\lambda t)^{h-n}}{(h-n)!} \\
&= e^{-\lambda t} (\lambda t)^n (p_t^{(2)})^n \cdot e^{(1-p_t^{(2)})\lambda t}
\end{aligned}$$

Mettendo tutto insieme troviamo

$$p_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{i \wedge j} \binom{i}{k} e^{-k\mu t} (1 - e^{-\lambda t})^{i-k} \cdot \frac{[(\lambda t)(\frac{1-e^{-\mu t}}{\mu t})]^{j-k}}{j - k!} e^{-\frac{1-e^{mut}}{\mu t} \lambda t}$$

Ora, andando a fare il limite per $t \to \infty$ di $p_{i,j}(t)$ notiamo che il termine $e^{-k\mu t}$ tende a 0, e quindi tutti i termini, tranne il termine per $k = 0$, vengono annullati. L'unico termine che rimane quindi è l'addendo della somma ottenuto sostituendo all'espressione $k = 0$. Troviamo quindi

$$\lim_{t \to \infty} p_{i,j}(t) = \frac{(\frac{\lambda}{\mu})^j}{j!} e^{-\frac{\lambda}{\mu}} \sim Poiss(\frac{\lambda}{\mu})$$

Dunque una coda $M|M|\infty$ è *ergodica*, e la sua legge limite è una poissoniana di parametro λ/mu. $\square$

Osservazione 1.1. Notiamo che abbiamo ottenuto un risultato simile nello studio di una coda a 2 sportelli. Infatti avevamo dimostrato che il numero di clienti in media al tempo t, se $t >> 1$, non dipendenva dal tempo t. In particolare infatti se abbiamo una coda $M|G|\infty$ in cui T è la v.a. che tiene conto del tempo di attesa per il servizio, abbiamo che, per $t >> 1$, vale

$$X_t \sim_P oiss(\lambda \mathbb{E}[T]).$$

Nel caso di code di Markov $M|M|\infty$, in cui il tempo di attesa per il servizio è di legge esponenziale di parametro μ, abbiamo che $\mathbb{E}[T] = 1/\mu$.

Infine, notiamo che tale risultato è molto simile al concetto di ergodicità per catene di markov discrete.