Argomenti Lezione

- Def. di funzione
- Proprietà di funzioni
- Funzione invertibile
- Combinazione di funzioni
- Funzioni elementari
- Funzioni nella programmazione

Che cos'è una funzione?

Una funzione è un oggetto matematico che ci permette di associare elementi di un insieme ad elementi di un altro insieme.

Dati due insiemi A e B, per indicare che f è una funzione che associa elementi di A ad elementi di B utilizziamo la seguente notazione

INSIEME DI PARTENZA (DOMINIO)

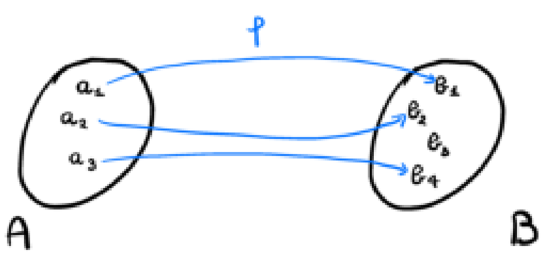
$$f : A \longrightarrow B$$

SIMBOLO DI FUNZIONE (FUNTORE)

INSIEME DI ARRIVO (CODOMINIO)

Per indicare poi le particolari associazioni di f abbiamo due modi:

Graficamente



Analiticamente

$A = \{ a_1, a_2, a_3 \}$

$B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4 \}$

$f(a_1) = b_1$

$f(a_2) = b_2$

$f(a_3) = b_4$

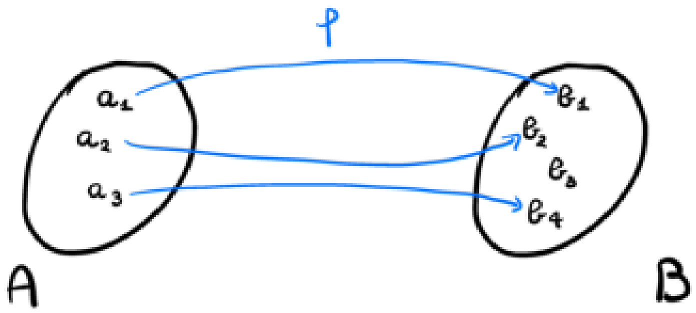
Formalmente abbiamo la seguente definizione.

DEF: Dati due insiemi A, B una FUNZIONE $f: A \to B$ è un sottoinsieme del PRODOTTO CARTESIANO tra A e B

$$f \subseteq A \times B$$

dove $(x, y) \in f \overset{\Delta}{\Leftrightarrow} f(x) = y$.

Rispetto all'esempio di prima troviamo



$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

$$B = \{b_1, b_2, b_3, b_4\}$$

$$\begin{aligned} A \times B = \{ & (a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_1, b_3), (a_1, b_4), \\ & (a_2, b_1), (a_2, b_2), (a_2, b_3), (a_2, b_4), \\ & (a_3, b_1), (a_3, b_2), (a_3, b_3), (a_3, b_4)\} \end{aligned}$$

$$f = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_4)\} \subseteq A \times B$$

Condizioni Necessarie

Non tutte le ASSOCIAZIONI rappresentano delle FUNZIONI.
Per avere una FUNZIONE una ASSOCIAZIONE deve rispettare le seguenti RICHIESTE:

1. Ad ogni elemento del dominio deve essere associato un elemento del codominio;
2. Non è possibile associare allo stesso elemento del dominio due o più elementi del codominio.

Possiamo esprimere questi vincoli utilizzando il linguaggio della LOGICA

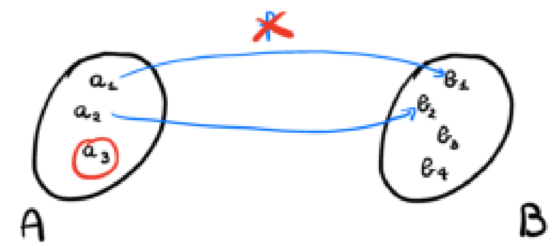
ESISTE UN SOLO ELEMENTO DEL CODOMINIO

$$\forall a \in A : \exists! b \in B : f(a) = b$$

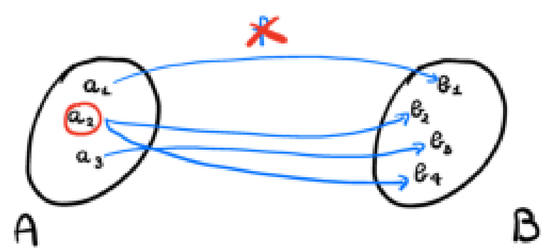
PER OGNI ELEMENTO DEL DOMINIO

CHE VIENE MAPPATO TRAMITE f

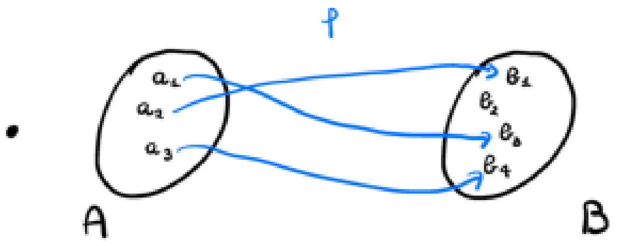
ESEMPI

- 

NON è una FUNZIONE
in quanto ad a_1 NON è associato nessun elemento del codominio B.

- 

NON è una FUNZIONE
in quanto ad a_2 sono associati due elementi distinti del codominio B.



È una funzione in quanto ad ogni elemento del dominio A è associato uno ed uno solo elemento del codominio B.

Proprietà particolari

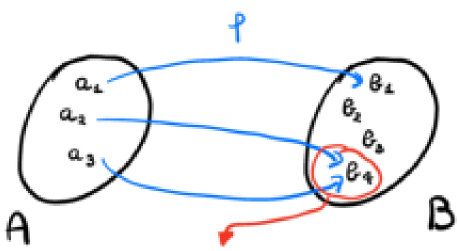
Una funzione $f: A \to B$ può essere

- **Iniettiva**

Quando f mappa elementi diversi del domino ad elementi diversi del codominio. In formula

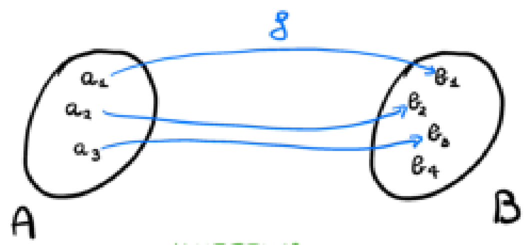
$$\forall a_1, a_2 \in A: f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

Ad esempio,



NON INIETTIVA

$a_2 \neq a_3$ ma $f(a_2) = f(a_3)$



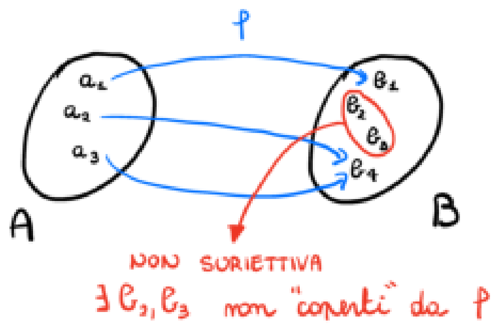
INIETTIVA

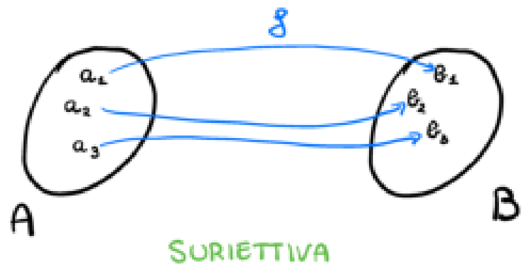
- **Suriettiva**

Quando f riesce a "coprire" tutto il codominio.
In formula,

$$\forall b \in B: \exists a \in A: f(a) = b$$

Ad esempio,





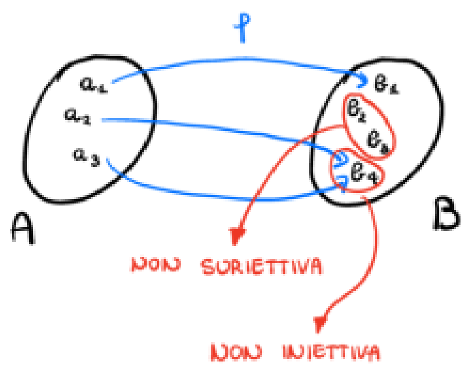
- <u>BIETTIVA</u>

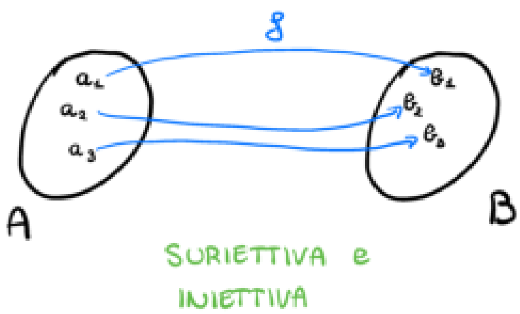
Quando f è sia INIETTIVA che SURIETTIVA.

In formula

$$\forall b \in B : \exists! a \in A : f(a) = b$$

Ad esempio,



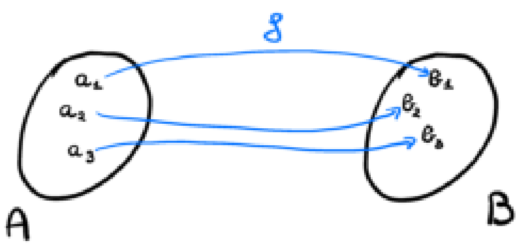


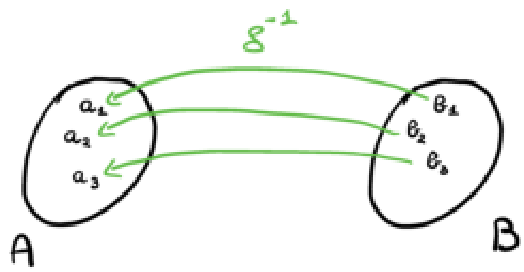
FUNZIONE INVERTIBILE

Quando $f : A \to B$ è BIIETTIVA è possibile definire la sua FUNZIONE INVERSA $f^{-1} : B \to A$, caratterizzata dal fatto che

$$f^{-1}(b) = a \iff f(a) = b$$

Graficamente per ottenere f^{-1} a partire da f basta invertire la direzione delle frecce.





$g : A \to B$

$g(a_1) = b_1$
$g(a_2) = b_2$
$g(a_3) = b_3$

$g^{-1} : B \to A$

$g^{-1}(b_1) = a_1$
$g^{-1}(b_2) = a_2$
$g^{-1}(b_3) = a_3$

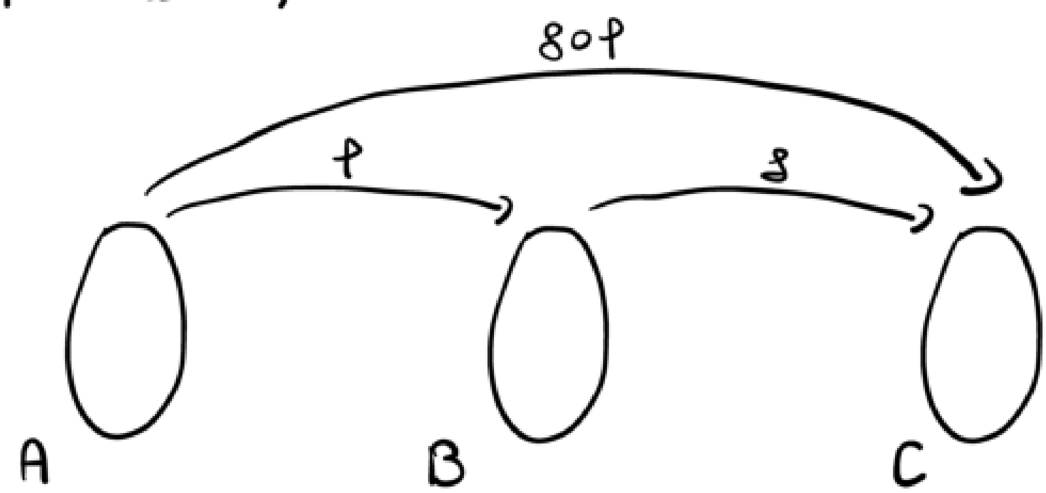
COMBINAZIONE DI FUNZIONI

Date due funzioni $f : A \to B$ e $g : B \to C$ possiamo COMBINARLE tra loro per ottenere la funzione $g \circ f : A \to C$

"COMPOSTA A"

$$\forall a \in A : \quad g \circ f(a) := g(f(a))$$

Graficamente,



Ad esempio, se

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad f(x) = x+1$$
$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad , \quad g(x) = x^2$$

allora abbiamo le seguenti COMBINAZIONI

$$g \circ f(x) = g(f(x)) = g(x+1) = (x+1)^2$$

$$f \circ g(x) = f(g(x)) = f(x^2) = x^2+1$$

OSS: Come è possibile vedere, la combinazione di funzioni non è una operazione COMMUTATIVA.

ESERCIZIO

Dimostrare che se $f: A \Rightarrow B$ e $g: B \Rightarrow C$ sono due funzioni INIETTIVE, allora anche $g \circ f$ è iniettiva.

dim:

$$\forall a_1, a_2 \in A: \; f(a_1) = f(a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$
$$\forall b_1, b_2 \in B: \; g(b_1) = g(b_2) \Rightarrow b_1 = b_2$$

Siano $a_1, a_2 \in A$

$$g \circ f(a_1) = g \circ f(a_2) \overset{?}{\Rightarrow} a_1 = a_2 \quad \checkmark$$

$$\begin{array}{ccc} g \circ f(a_1) & = & g \circ f(a_2) \\ \parallel & & \parallel \\ g(f(a_1)) & = & g(f(a_2)) \end{array}$$

$\Rightarrow f(a_1) = f(a_2)$ (INI. di g)

$\Rightarrow a_1 = a_2$ (INI. di f)

$\blacksquare$

FUNZIONI ELEMENTARI

Tra tutte le funzioni possibili ce ne sono alcune fondamentali per lo studio degli algoritmi. Tra queste troviamo:

- POLINOMI
- ESPONENZIALI
- LOGARITMI

$\left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\}$ Da vedere nei prossimi video

FUNZIONI NELLA PROGRAMMAZIONE

La maggior parte dei linguaggi di programmazione permette di definire delle FUNZIONI (o PROCEDURE), che costituiscono dei BLOCCHI DI CODICE che possono eventualmente essere PARAMETRIZZATI rispetto a delle VARIABILI.

Osserviamo quindi come la stessa parola 'FUNZIONE', assume SIGNIFICATI DIVERSI a seconda del CONTESTO.

CONTESTO INFORMATICO

```python
def check_primeness(n):
    result = True
    for j in range(2, n):
        if n % j == 0:
            result = False
    return result
```

CONTESTO MATEMATICO

$P : \mathbb{N} \to \{\text{TRUE}, \text{FALSE}\}$

Definita $\forall n \in \mathbb{N}$

$$P(n) := \begin{cases} \text{TRUE} & , n \text{ è PRIMO} \\ \text{FALSE} & , \text{ALTRIMENTI} \end{cases}$$

Come mostra il precedente esempio, può succedere che una funzione matematica sia CALCOLATA tramite una funzione informatica. In generale però una funzione informatica può modificare lo STATO della MACCHINA in cui è eseguita (SIDE-EFFECTS). In questi casi il mapping

FUNZIONE INFORMATICA ⟷ FUNZIONE MATEMATICA

non è più preservato completamente.